Universität Bielefeld
Fakultät für Linguistik
und Literaturwissenschaft

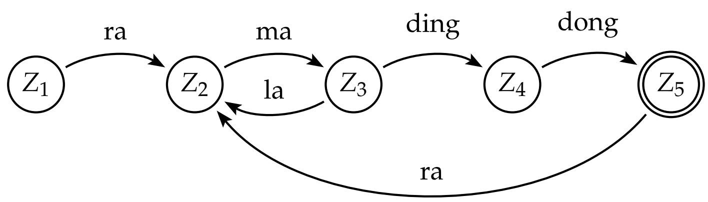
Prof. Dr. Walther Kindt

Juana Salas

Peter Menke

Formale Methoden der Linguistik I

Kurz-Zusammenstellung
Wintersemester 2006/2007



Stand: 19. November 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die axiomatische Mengentheorie

Drei Grundkonzepte

Klassenbildung	$\{u : E(u)\}$
Elementbeziehung	$x \in A$
Klassengleichheit	$A = B$

1.1 Grundlegende Definitionen

Mengenuniversum	$MU := \{u : u = u\}$
Leere Menge	$\emptyset := \{u : u \neq u\}$
Russellklasse	$RK := \{u : u \notin u\}$
Teilklassenbeziehung	$A \subset B \quad :\Leftrightarrow \quad$ für alle u gilt: $u \in A \Rightarrow u \in B$
Klassendurchschnitt	$A \cap B := \{u : u \in A$ und $u \in B\}$
Klassenvereinigung	$A \cup B := \{u : u \in A$ oder $u \in B\}$
Klassendifferenz	$A \setminus B := \{u : u \in A$ und $u \notin B\}$
Disjunkte Klassen	A und B sind disjunkt $: \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
Einerklasse	$\{A\} := \{u : u = A\}$
Paarklasse	$\{A, B\} := \{u : u = A$ oder $u = B)$
Klasse aus n Elementen	$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} := \{u : u = A_1$ oder $u = A_2$ oder $\ldots$ oder $u = A_n\}$
Potenzklasse	$\mathrm{Pot}\, A := \{u : u \subset A\}$
Nachfolgerklasse	$\mathrm{N}\, A := A \cup \{A\}$
Induktive Klasse	A ist induktiv $\quad :\Leftrightarrow \quad \emptyset \in A$ und für alle $u \in A$ gilt: $\mathrm{N}\, u \in A$
Null	$0 := \emptyset$
Nachfolgerzahlen	$n + 1 := Nn$
1 als Nachfolger von 0	$1 := 0 \cup \{0\} = \{0\}$
2 als Nachfolger von 1	$2 := 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$
Natürliche Zahlen	$\omega := \{u : u \in A$ für alle induktiven Klassen $A\}$

1.2 Axiome

Reflexivitätsaxiom für $=$	$A = A$
Symmetrieaxiom für $=$	$A = B \Rightarrow B = A$
Transitivitätsaxiom für $=$	$A = B$ und $B = C \Rightarrow A = C$
Zugehörigkeitsaxiom	Für alle $v \in MU$ gilt: $v \in \{u : E(u)\} \Leftrightarrow E(v)$
Extensionalitätsaxiom	$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ und $B \subset A$
Vereinigungsmengenaxiom	$A \in MU$ und $B \in MU \Rightarrow A \cup B \in MU$
Paarmengenaxiom	$A \in MU$ und $B \in MU \Rightarrow \{A, B\} \in MU$
Teilmengenaxiom	$A \subset B$ und $B \in MU \Rightarrow A \in MU$
Potenzmengenaxiom	$A \in MU \Rightarrow \operatorname{Pot} A \in MU$
Unendlichkeitsaxiom	$\omega \in MU$

Anmerkung: Das Vereinigungsmengenaxiom ist noch verallgemeinerbar

1.3 Theoreme

Leermengentheorem	$\emptyset \in MU$
Theorem der Russellklasse	$RK \notin MU$
Durchschnittsmengentheorem	$A \in MU$ und $B \in MU \Rightarrow A \cap B \in MU$
Klassenbildung	$A = \{u : u \in A\}$
Durchschnittsverkleinerung	$A \cap B \subset A$
Idempotenz	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Kommutativität	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Assoziativität	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivität	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Absorption	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
De Morgan	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
Transitivität von $\subset$	$A \subset B$ und $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
Extensionale Darstellung von $n+1$	$n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\}$
Potenzmengengröße	$\lvert \operatorname{Pot} A \rvert = 2^{\lvert A \rvert}$

Anmerkung: $|A|$ ist die formale Schreibweise für Anzahl A und wird später noch eingeführt.

1.4 Drei Beweisprinzipien

1.4.1 direkter oder unmittelbarer Beweis

Beweis durch direkte Anwendung bereits bekannter Axiome, Definitionen und Theoreme.

Beispiel: Beweis des Absorptionsgesetzes $A \cap (A \cup B) = A$

1. Beweis von $A \cap (A \cup B) \subset A$
   Generell gilt $A \cap C \subset A$ (Theorem der Durchschnittsverkleinerung). Also mit $C = (A \cup B)$: $A \cap (A \cup B) \subset A$.
2. Beweis von $A \subset A \cap (A \cup B)$
   Sei $a \in A$ beliebig gewählt. Dann $a \in A \cup B$ nach Definition von $\cup$.
   Also auch $a \in \big(A \cap (A \cup B)\big)$.
3. Da $A = B$ dann gilt, wenn sowohl $A \subset B$ als auch $B \subset A$ (Extensionalitätsaxiom), ist $A \cap (A \cup B) = A$.

1.4.2 Indirekter Beweis

Annahme des Gegenteils, dies führt zum Widerspruch.

Beispiel: Beweis von $RK \notin MU$

1. Annahme: $RK \in MU$.
2. Fall 1: $RK \in RK \Rightarrow RK \notin RK$ (nach dem Zugehörigkeitsaxiom)
3. Fall 2: $RK \notin RK \Rightarrow RK \in RK$ (ebenso)

Die Annahme $RK \in MU$ führt zu einem Widerspruch. Also $RK \notin MU$.

1.4.3 Beweis durch Umformulierung

Beweis durch Umformulierung mit Hilfe von bereits bewiesenen Theoremen.

Beispiel: Beweis des Absorptionsgesetzes $A \cup (A \cap B) = A$

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cup A) \cap (A \cup B) \quad \text{(Distributivität)} \\ &= A \cap (A \cup B) \quad \text{(Idempotenz)} \\ &= A \quad \text{(Absorption I)} \end{aligned}$$

1.4.4 Vollständige Induktion

Allgemeingültigkeit einer Eigenschaft E für alle $n \in \omega$ durch zwei Schritte:

1. Beweis für $n = 0$
2. Beweis, dass für alle $n \in \omega$ gilt: $E(n) \Rightarrow E(n+1)$.

Beispiel: Beweis der Potenzmengengröße

1. Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $|\mathrm{Pot} A| = |\{\emptyset\}| = 2^0 = 1$.
2. Induktionsannahme: Gesetzmäßigkeit gilt schon für $|A| = n$.
3. Induktionsbeweis: Zu zeigen: Gesetzmäßigkeit gilt auch für $|A| = n + 1$.
   $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Wie kommt man von den Teilmengen von A zu den Teilmengen einer um das Element a_{n+1} größeren Menge?
   Deklaration dieser Menge als $A' = A \cup \{a_{n+1}\} = A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Da $A \subset A'$, sind alle Teilmengen (davon gibt es 2^n Stück) von A auch Teilmengen von A'. Um die restlichen Teilmengen zu erhalten, müssen die Teilmengen von A jeweils um a_{n+1} erweitert werden. Insgesamt gibt es also $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen von A'.
   Also ist $|\mathrm{Pot} A'| = 2^{|A'|} = 2^{n+1}$ **q. e. d.**

1.5 Anwendungsbeispiele

In der Linguistik braucht man für die jeweils betreffende Sprache präzise Definitionen für Phrasen- und Wortkategorien. Zu diesem Zweck werden zunächst die Kategorien NP (Nominalphrase) und AP (Adverbialphrase) als Äquivalenzklassen[1] eingeführt. Daran anschließend kann man z. B. Präpositionen und Postpositionen folgendermaßen definieren:

$$PR\ddot{A}P := \{u \ : \ u \text{ ist ein Wort und es gibt ein } p \in NP \text{ mit } up \in AP\}$$

Mit anderen Worten: Präpositionen sind Wörter, die bei unmittelbarer Voranstellung vor eine NP eine AP ergeben können. Analog werden Postpositionen definiert:

$$POSTP := \{u \ : \ u \text{ ist ein Wort und es gibt ein } p \in NP \text{ mit } pu \in AP\}$$

Anhand dieser Situation lassen sich nun viele der bisher behandelten Themen verdeutlichen.

(i) Präpositionen und Postpositionen (und auch die hier nicht näher behandelten Zirkumpositionen wie z. B. in „von heute an“, „um Himmels willen“) können allgemein zusammengefasst werden als **Adpositionen**. Mengentheoretisch wird definiert: $ADP = PR\ddot{A}P \cup POSTP$ (oder unter Berücksichtigung der Zirkumpositionen: $ADP = PR\ddot{A}P \cup POSTP \cup ZIRKUMP$).

(ii) Es stellt sich die Frage, ob es Wörter gibt, die zugleich Präpositionen und Postpositionen sind – oder in der Sprache der Mengentheorie, ob die Mengen der Prä- und Postpositionen disjunkt sind oder nicht ($PR\ddot{A}P \cap POSTP = \emptyset$). Es lässt sich aber (mindestens) ein Beispiel finden, in dem ein Wort sowohl als Präposition als auch als Postposition verwenden lässt, z. B. für das Wort *wegen*:

(1) a. $\underset{NP}{\underline{\text{des Wetters}}}\ \underset{POSTP}{\underline{\text{wegen}}}$

b. $\underset{PR\ddot{A}P}{\underline{\text{wegen}}}\ \underset{NP}{\underline{\text{des Wetters}}}$

Da also $wegen \in PR\ddot{A}P$ und $wegen \in POSTP$, ist $PR\ddot{A}P \cap POSTP \neq \emptyset$.

(iii) Außerdem kann man überlegen, ob es im Deutschen Wörter gibt, die **nur** Präpositionen (sogenannte strikte Präpositionen) bzw. **nur** Postpositionen (sogenannte strikte Postpositionen) sein können. Auch diese gibt es:

(2) a. $^*\underset{NP}{\underline{\text{Bielefeld}}}\ \underset{POSTP}{\underline{\text{in}}}$

b. $\underset{PR\ddot{A}P}{\underline{\text{in}}}\ \underset{NP}{\underline{\text{Bielefeld}}}$

(3) a. $\underset{NP}{\underline{\text{dem Mann}}}\ \underset{POSTP}{\underline{\text{zuliebe}}}$

b. $^*\underset{PR\ddot{A}P}{\underline{\text{zuliebe}}}\ \underset{NP}{\underline{\text{dem Mann}}}$

Der Stern $*$ in den obigen Beispielen ist eine linguistische Notation, die angibt, dass es sich um ein ungrammatisches Beispiel handelt. *in* ist also eine **strikte** Präposition, *zuliebe* ist eine **strikte** Postposition.

Wir können die Mengen der strikten Prä- und Postpositionen so beschreiben: $PR\ddot{A}P' := PR\ddot{A}P \setminus POSTP$ und $POSTP' := POSTP \setminus PR\ddot{A}P$. Strikte Präpositionen sind also alle Präpositionen, die keine Postpositionen sind. Die Definition der strikten Postpositionen ist entsprechend.

[1] vgl. Abschnitt 2.3

Nicht alle Präpositionen sind strikt, aber alle strikten Präpositionen sind auch Präpositionen. Dies lässt sich mengentheoretisch formulieren als $PRÄP' \subset PRÄP$ und $POSTP' \subset POSTP$.
Die Mengen $PRÄP'$ und $POSTP'$ sind aus oben genanntem Grund wirklich disjunkt ($PRÄP' \cap POSTP' = \emptyset$), denn eine strikte Präposition kann niemals Postposition, eine strikte Postposition niemals Präposition sein.

(iv) Da es sehr viele (strikte) Präpositionen gibt, ist es langwierig, die Menge der Präpositionen extensional zu notieren. Einfacher scheint das bei den strikten Postpositionen zu sein, da es anscheinend von ihnen nur sehr wenige gibt. Ist vielleicht *zuliebe* die einzige? Ist also schon die Einermenge mit *zuliebe* identisch mit der gesamten Menge der strikten Postpositionen (also $\{zuliebe\} = POSTP'$)? Dies lässt sich widerlegen: Auch *halber* ist eine strikte Postposition. Es gibt die These, dass $\{zuliebe, halber\} = POSTP'$ ist – aber beweisen kann man dies nur, indem man alle Adpositionen der deutschen Sprache sammelt, und das ist ein aufwendiges Verfahren.

2 Einführung in die Strukturtheorie

2.1 Grundlegende Definitionen

Geordnetes Paar	$\langle a,b\rangle := \{\{a\},\{a,b\}\}$
Relation	R ist eine Relation $:\Leftrightarrow$ Für alle $u \in R$ gibt es v, w mit $u = \langle v,w\rangle$
Kreuzprodukt	$A \times B := \{\langle u,v\rangle : u \in A$ und $v \in B\}$
Definitionsbereich	Def $R := \{u :$ es gibt v mit $\langle u,v\rangle \in R\}$
Wertebereich	Wert $R := \{v :$ es gibt u mit $\langle u,v\rangle \in R\}$
Lokale Werteklasse	$R[a] := \{v : \langle a,v\rangle \in R\}$
Inverse Relation	$R^{-1} := \{u :$ es gibt v, w mit $u = \langle v,w\rangle$ und $\langle w,v\rangle \in R\}$
Reflexivität	R ist reflexiv $:\Leftrightarrow$ Für alle $u \in$ Def $R \cup$ Wert R gilt: $\langle u,u\rangle \in R$
Symmetrie	R ist symmetrisch $:\Leftrightarrow$ Für alle u und für alle v gilt: $\langle u,v\rangle \in R \Rightarrow \langle v,u\rangle \in R$
Transitivität	R ist transitiv $:\Leftrightarrow$ Für alle u, v, w gilt: $\langle u,v\rangle \in R$ und $\langle v,w\rangle \in R \Rightarrow \langle u,w\rangle \in R$
Äquivalenzrelation	R ist Äquivalenzrelation $:\Leftrightarrow$ R ist Relation und R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv
Funktion	F ist Funktion $:\Leftrightarrow$ F ist Relation und für alle u, v, w gilt: $\langle u,v\rangle \in R$ und $\langle u,w\rangle \in R \Rightarrow v = w$
Injektiv	F ist injektiv $:\Leftrightarrow$ F ist Funktion und $F^{-}1$ ist Funktion
Iota-Operator	$\iota\, u\big(E(u)\big)$ $:\Leftrightarrow$ Dasjenige Element, das als einziges die Eigenschaft E hat
Funktionswert	$\mathrm{F}\,(a) := \iota\, u\big(u \in F[a]\big)$
Endliche Folge	F ist Folge $:\Leftrightarrow$ F ist Funktion und es gibt $n \in \omega$ mit Def $F = n$
Klasse der möglichen Folgen (Zeichenreihen)	$A^* := \{u : u$ ist Folge und Wert $u \subset A\}$
Endlich	A ist endlich $:\Leftrightarrow$ Es gibt $F \in A^*$ mit Wert $F = A$
Anzahl (für endl. A)	$\lvert A\rvert := \iota\, n\big($es gibt $F \in A^*$ mit F ist injektiv, Def $F = n$ und Wert $F = A\big)$
Klasse der Funktionen	$A^B := \{u : u$ ist Funktion und Def $u = B$ und Wert $u \subset A\}$
Tripel	$\langle a,b,c\rangle := \langle\langle a,b\rangle,c\rangle$
3-stellige Relation	$\mathrm{REL}_3\, R$ $:\Leftrightarrow$ Es gibt U, V, W mit $R \subset (U \times V) \times W$

2.2 Theoreme

Eindeutigkeit der Komponenten	$\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle \Leftrightarrow a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$
Kreuzproduktmengentheorem	$A \in MU$ und $B \in MU \Rightarrow A \times B \in MU$
Relation und Kreuzprodukt	R ist Relation $:\Leftrightarrow$ Es gibt U, V mit $R \subset U \times V$
Abgeschlossenheit von Relationen	R_1 und R_2 sind Relationen $\Rightarrow$ $R_1 \cup R_2$ und $R_1 \cap R_2$ sind Relationen.
Äquivalenzklassentheorem	R ist Äquivalenzrelation $\Rightarrow$ (i) Für alle $u \in \mathrm{Def}\, R$ gilt: $u \in R[u]$ (ii) Für alle $u, v \in \mathrm{Def}\, R$ gilt: $\langle u, v\rangle \in R \Leftrightarrow R[u] = R[v]$ (iii) Für alle $u, v \in \mathrm{Def}\, R$ gilt: $R[u] \cap R[v] \neq \emptyset \Leftrightarrow R[u] = R[v]$ (iv) Die Äquivalenzklassen von R bilden eine disjunkte Zerlegung (Partition) von Def R Für alle $u, v \in \mathrm{Def}\, R$ mit $\langle u, v\rangle \notin R \Rightarrow R[u] \cap R[v] = \emptyset$
Abgeschlossenheit von Funktionen	F_1 und F_2 sind Funktionen $\Rightarrow$ (i) $F_1 \cap F_2$ ist eine Funktion (ii)$F_1 \cup F_2$ ist dann Funktion, wenn $\mathrm{Def}\, F_1 \cap \mathrm{Def}\, F_2 = \emptyset$

2.3 Anwendungsbeispiele

2.3.1 Syntagmatische Relationen

Lineare Präzedenz: Der Artikel steht im Deutschen vor Adjektiv und Nomen.

Kongruenz: Subjekts-Nominalphrase und finites Verb stimmen in Person und Numerus überein.

2.3.2 Paradigmatische Relationen

Phonemdefinition: Zwei Laute sind phonematisch äquivalent genau dann, wenn sie in einsilbigen Wörtern wechselseitig füreinander ersetzbar sind, ohne dass sich die Bedeutung verändert, oder wenn sie phonetisch ähnlich und komplementär verteilt sind.

Beispiel 1 R-Laute im Deutschen: Die Laute "Zungen-R" [r] und "Zäpfchen-R" [ʀ]/[ʁ] sind phonematisch äquivalent und gehören zum deutschen Phonem /r/. Die drei Lautfolgen [ˈroːt], [ˈʀoːt] und [ˈʁoːt], drei Aussprachevarianten für das Wort "rot", weisen beispielsweise im Deutschen keinen Bedeutungsunterschied auf.

Beispiel 2 Die Laute [ç] ("ich-Laut") und [x] ("ach-Laut") sind im Deutschen komplementär verteilt, das bedeutet, sie können nach den Aussspracheregeln der deutschen Sprache niemals im selben Kontext (an derselben Position in einer ansonsten gleichen Lautfolge) auftreten.

Beispiel 3 [s] und [ʃ] sind **nicht** phonematisch äquivalent, denn z. B. findet im Wortpaar "Busch" ([bʊʃ]) und "Bus" ([bʊs]) bei Austausch der beiden Laute eine Bedeutungsveränderung statt.

Beispiel 4 Auch [r] und [l] gehören im Deutschen nicht zu einem Phonem, z. B. wegen "Reim" ([ra͜ɪm]) $\neq$ "Leim" ([la͜ɪm]).

3 Grammatiken und Automaten

3.1 Grundlegende Definitionen

3.1.1 Autonome Sequentielle Systeme

Autonomes Sequentielles System	$ASS\langle Z, R\rangle$ $:\Leftrightarrow$ (i) $Z \neq \emptyset$ (ii) $R \subset Z \times Z, R \neq \emptyset$
Anfangs- und Endzustand	$z \in Z$ ist Anfangszustand $\Leftrightarrow R^{-1}[z] = \emptyset$ $z \in Z$ ist Endzustand $\Leftrightarrow R[z] = \emptyset$
Ableitung	f ist eine Ableitung im ASS $\langle Z, R\rangle \Leftrightarrow f \in Z^*$ und für alle $m \in \mathrm{Def} f$ mit $m+1 \in \mathrm{Def} f$ gilt: $\langle f(m), f(m+1)\rangle \in R$
Ableitbarkeit	$w \vdash z \Leftrightarrow$ es gibt eine Ableitung f mit $f(0) = w$ und $f((\mathrm{Def} f) - 1) = z$

3.1.2 Ersetzungsgrammatiken

Ersetzungsgrammatik	$G = \langle V_k, V_l, R, S\rangle$ ist eine Ersetzungsgrammatik $:\Leftrightarrow$ (i) $V_k \neq \emptyset, V_l \neq \emptyset, R \neq \emptyset$, ENDL$V_k$, ENDL$V_l$, ENDL$R$ (ii) $V_k \cap V_l = \emptyset$ (iii) $R \subset (V^* \setminus \{\emptyset\}) \times V^*$, wobei $V = V_k \cup V_l$ (iv) $S \in V_k$
Zugeordnetes ASS	Einer Ersetzungsgrammatik $\langle V_k, V_l, R, S\rangle$ wird das ASS $\langle Z, R'\rangle$ zugeordnet: $Z := V^*$ $R' := \{\langle z, z'\rangle : z, z' \in Z$ und es gibt $u, v, w_1, w_2 \in V^*$ mit $z = w_1 u w_2$ und $z' = w_1 v w_2$ und $\langle u, v\rangle \in R\}$
Schreibweise Regeln	Statt $\langle u, v\rangle \in R$ schreibt man $u \rightarrow v$
Erzeugte Sprache	$L(G) := \{x \in V_l^* : S \vdash x\}$
Kontextsensitive Grammatik	G ist eine Ersetzungsgrammatik und ihre Regeln haben folgendes Format: $u \rightarrow v$, wobei $u \in V^*, v \in V^*$ und $\lvert u\rvert \leq \lvert v\rvert$
Kontextfreie Grammatik	G ist eine Ersetzungsgrammatik und ihre Regeln haben folgendes Format: $A \rightarrow v$ mit $v \neq \emptyset$ und $v \in V^*, A \in V_k$
Chomsky-Normalform	G ist eine kontextfreie Ersetzungsgrammatik und ihre Regeln haben folgendes Format: $A \rightarrow BC$ oder $A \rightarrow a$, mit $A \in V_k, B \in V_k, C \in V_k$ und $a \in V_l$
Reguläre Grammatiken	
Rechtslineare Grammatik	G ist eine Ersetzungsgrammatik und ihre Regeln haben folgendes Format: $A \rightarrow vB$ oder $A \rightarrow v$ mit $A \in V_k, B \in V_k$ und $v \in V_l^* \setminus \{\emptyset\}$
Elementar rechtslineare Grammatik	G ist eine Ersetzungsgrammatik und ihre Regeln haben folgendes Format: $A \rightarrow vB$ oder $A \rightarrow v$ mit $A \in V_k, B \in V_k$ und $v \in V_l$
Linkslineare Grammatik	G ist eine Ersetzungsgrammatik und ihre Regeln haben folgendes Format: $A \rightarrow Bv$ oder $A \rightarrow v$ mit $A \in V_k, B \in V_k$ und $v \in V_l^* \setminus \{\emptyset\}$
Elementar linkslineare Grammatik	G ist eine Ersetzungsgrammatik und ihre Regeln haben folgendes Format: $A \rightarrow Bv$ oder $A \rightarrow v$ mit $A \in V_k, B \in V_k$ und $v \in V_l$

3.1.3 Sequentielle Input-Systeme

Sequentielles Input-System	$\langle Z, V_l, R\rangle$ ist ein sequenteilles Input-System (SIS) $:\Leftrightarrow$ (i) $Z \neq \emptyset$ (ii) $V_l \neq \emptyset$ (iii) $R \subset (Z \times V_l) \times Z$
Ableitung	f ist eine Ableitung im SIS $\langle Z, V_l, R\rangle$ für den Input $x \in V_l^* \Leftrightarrow f \in Z^*$, $\mathrm{Def} x = \mathrm{Def} f$ und für alle $m \in \mathrm{Def} f$ mit $m+1 \in \mathrm{Def} f$ gilt: $\langle\langle f(m), x(m)\rangle, f(m+1)\rangle \in R$
Ableitbarkeit	$w \overset{x}{\vdash} z \Leftrightarrow$ es gibt eine Ableitung f für x mit $f(0) = w$ und $f(\mathrm{Def} f - 1) = z$

3.1.4 Automaten

Automat	$A = \langle Z, V_l, R, S, F\rangle$ ist ein Automat $:\Leftrightarrow$ (i) $\langle Z, V_l, R\rangle$ ist ein SIS (ii) $S \in Z$ (iii) $F \neq \emptyset$ und $F \subset Z$
Akzeptierte Sprache	$L(A) := \{x \in V_l^* : \text{es gibt } z \in F \text{ mit } S \overset{x}{\vdash} z\}$
Finiter Automat	$A = \langle Z, V_l, R, S, F\rangle$ ist ein finiter (nicht-deterministischer) Automat $:\Leftrightarrow$ (i) A ist ein Automat (ii) ENDLZ (iii) ENDLV_l
Deterministischer finiter Automat	$A = \langle Z, V_l, R, S, F\rangle$ ist ein deterministischer finiter Automat $:\Leftrightarrow$ A ist ein finiter Automat und FKTR
Vereinfachter Kellerautomat	$A = \langle Z, V_l, V_k, R, S\rangle$ ist ein vereinfachter Kellerautomat $:\Leftrightarrow$ (i) $\langle Z, V_l, R, S, \{\emptyset\}\rangle$ ist ein Automat (ii) ENDLV_l und $\emptyset \in V_l$ (iii) ENDLV_k (iv) $Z = (V_l \cup V_k)^*$ (v) Wenn $z = tv, t \neq \emptyset, t \in V_l \cup V_k$ und $z' \in R[z, x]$, dann gibt es $u \in Z$ mit $z' = uv$

3.2 Theoreme

3.2.1 Chomsky-Hierarchie

1. Die von regulären Grammatiken erzeugten Sprachen bilden eine echte Teilklasse der von kontextfreien Grammatiken erzeugbaren Sprachen.
2. Die von kontextfreien Grammatiken erzeugten Sprachen bilden eine echte Teilklasse der von kontextsensitiven Grammatiken erzeugbaren Sprachen.
3. Die von kontextsensitiven Grammatiken erzeugten Sprachen bilden eine echte Teilklasse der von allgemeinen Ersetzungsgrammatiken erzeugbaren Sprachen.

Beispiele $L = \{a^n b^n : n \in \omega \text{ und } n \geq 1\}$ ist von einer kontextfreien, nicht aber von einer regulären Grammatik erzeugbar.
$L = \{a^n b^n c^n : n \in \omega \text{ und } n \geq 1\}$ ist von einer kontextsensitiven, nicht aber von einer kontextfreien Grammatik erzeugbar.

3.2.2 Beschreibungsäquivalente Grammatiken

1. Jede Sprache, die von einer linkslinearen Grammatik erzeugt werden kann, lässt sich auch von einer rechtslinearen Grammatik erzeugen. Auch das Umgekehrte gilt.
2. Jede Sprache, die von einer rechtslinearen Grammatik erzeugt werden kann, lässt sich auch von einer elementar rechtslinearen Grammatik erzeugen.
3. Jede Sprache, die von einer linkslinearen Grammatik erzeugt werden kann, lässt sich auch von einer elementar linkslinearen Grammatik erzeugen.
4. Jede Sprache, die mit einer kontextfreien Grammatik erzeugbar ist, lässt sich auch von einer Grammatik mit Regeln ausschließlich in Chomsky-Normalform erzeugen.

3.2.3 Beschreibungsäquivalenz von Automaten und Grammatiken

1. Jede von einem deterministischen finiten Automaten akzeptierte Sprache kann von einer regulären Grammatik erzeugt werden.
2. Jede von einer regulären Grammatik erzeugte Sprache wird von einem nicht-deterministischen finiten Automaten akzeptiert.
3. Jede von einem nicht-deterministischen finiten Automaten akzeptierte Sprache wird auch von einem äquivalenten deterministischen finiten Automaten akzeptiert.
4. Jede von einer kontextfreien Grammatik erzeugte Sprache kann von einem (vereinfachten) Kellerautomaten akzeptiert werden.
5. Jede von einem vereinfachten Kellerautomaten akzeptierte Sprache lässt sich von einer kontextfreien Grammatik erzeugen.