Universität Bielefeld

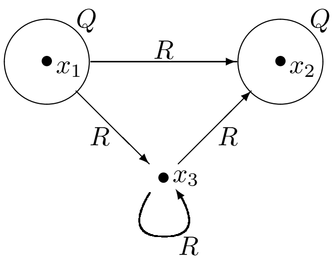
Formale Methoden der Linguistik
Prof. Dr. Walther Kindt, Mirco Hilbert
Fakultät für Linguistik und Literaturwissenschaft

Kurz-Zusammenstellung

Aussagen- und Prädikatenlogik

Mirco Hilbert*

WS 2000/01



$$\mathcal{I}(Q)(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x = x_1 \text{ oder } x = x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}(R)(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x = x_1 \text{ und } (y = x_2 \text{ oder } y = x_3) \\ & \qquad\; x = x_3 \text{ und } (y = x_2 \text{ oder } y = x_3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*eMail: mail@Mirco-Hilbert.de
Web: http://www.Mirco-Hilbert.de

(Stand: 2. Juli 2004)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Aussagen- und Prädikatenlogik

1.1 Syntax prädikatenlogischer Sprachen erster Stufe (PL1)

Vokabular Teilbereiche		korrespondierende Wortklassen	Stellenzahl	Symbolisierung
Individuenkonstanten	IK	Eigennamen	—	a, b, c, ...
Individuenvariablen	IV	Pronomina	—	u, v, w, ...
Prädikatenkonstanten	PK	finite Verbformen, Adjektive und Nomina im prädikativen Gebrauch	≥ 0	P, Q, R, ...
Funktionskonstanten	FK	definite Nominalphrasen mit noch zu besetzenden Argumenten	≥ 1	f, g, h, ...
Junktoren	J	parataktische Konjunktionen	≥ 1	$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ...
Quantoren	Q	Numeralia, Zahlwörter	2	$\forall$, $\exists$
Klammern		Gliederungssignale	—	(,)

Termbildungsregeln

1. $T \rightarrow a$ für jedes $a \in IK$.
2. $T \rightarrow v$ für jedes $v \in IV$.
3. $T \rightarrow fT...T(n\text{-mal})$ für jedes $f \in FK$ mit Stellenzahl $Stz(f) = n$.

Satzbildungsregeln

4. $S \rightarrow PT...T$ für jedes $P \in PK$ mit $Stz(P) = n$.
5. a) $S \rightarrow \neg S$.
   b) $S \rightarrow (SjS)$ für jedes $j \in J$.
6. $S \rightarrow qvS$ für jedes $q \in Q$.

Freies und gebundenes Vorkommen von Individuenvariablen

1. Eine im Satz A vorkommende IV v, die nicht neben einem Quantor steht, ist frei in A gdw. sie liegt nicht im Skopus[1] eines auf v bezogenen Quantors in A.
2. Eine im Satz A vorkommende IV v, die nicht neben einem Quantor steht, ist durch den Quantor q gebunden gdw. es gibt einen Satz B mit der Eigenschaft, dass $qv\,B$ Teilsatz von A ist und v frei in B ist.

Klammerersparungsregeln

1. Außenklammern lässt man weg.
2. $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

[1] Skopus (griech.: $\sigma\kappa o\pi o\varsigma$ $\widehat{=}$ Bereich): Sei q ein Quantor und $qv\,B$ ein Teilsatz von A, dann heißt B Skopus des auf v bezogenen Quantors q in A.

1.2 Semantik prädikatenlogischer Sprachen erster Stufe

1.2.1 Aussagenlogische Interpretation

Aussagenlogische Interpretation

$\mathcal{I}$ ist eine aussagenlogische Interpretation gdw.

(i) $\mathcal{I}$ ist eine Funktion, die jedem atomaren Satz genau einen Wert 0 oder 1 zuordnet.

(ii) $\mathcal{I}$ ordnet jedem Junktor die zugehörige Wahrheitsfunktion zu (definiert durch arithmetische Operation oder Wahrheitstafel).

(iii) a) Für jeden Satz A gilt: $\mathcal{I}(\neg A) = \mathcal{I}(\neg)(\mathcal{I}(A))$.

b) Für je zwei Sätze A_1 und A_2 und jedes $j \in J$ gilt:
$\mathcal{I}(A_1\, j\, A_2) = \mathcal{I}(j)(\mathcal{I}(A_1), \mathcal{I}(A_2))$.

Interpretation der (Standard-)Junktoren

Negation ($\neg$)

NICHT

A	$\neg A$
0	1
1	0

$\mathcal{I}(\neg A) = 1 - \mathcal{I}(A)$

Konjunktion ($\wedge$)

UND

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\mathcal{I}(A \wedge B) = \mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B) = \min(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$$

Disjunktion ($\vee$)

ODER

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\mathcal{I}(A \vee B) = \mathcal{I}(A) + \mathcal{I}(B) - \mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B) = \max(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$$

Implikation ($\rightarrow$)

WENN − DANN

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\mathcal{I}(A \rightarrow B) = 1 - \mathcal{I}(A) + \mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B) = \max(1-\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$$

Antivalenz ($\dot\vee$)

ENTWEDER − ODER

A	B	$A \dot\vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\mathcal{I}(A \dot\vee B) = \mathcal{I}(A) + \mathcal{I}(B) - 2\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B)$$

Äquivalenz ($\leftrightarrow$)

GENAU DANN − WENN

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\mathcal{I}(A \leftrightarrow B) = 1 - \mathcal{I}(A) - \mathcal{I}(B) + 2\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(B)$$

1.2.2 Prädikatenlogische Interpretation

Situation

Eine (zu einem Vokabular gehörige) Situation S besteht aus

1. einem nicht leeren Individuenbereich X
2. einer Konstanteninterpretation $\mathcal{I}$ mit den Eigenschaften
   (i) $\mathcal{I}$ ordnet jedem $a \in IK$ ein $x \in X$ zu.
   (ii) $\mathcal{I}$ ordnet jedem n-stelligen $f \in FK^n$ eine n-stellige Funktion über X zu,
   d. h. eine Funktion, die n Individuen aus X wieder ein Individuum aus X zuordnet.
   (iii) $\mathcal{I}$ ordnet jedem n-stelligen $P \in PK$ eine n-stellige Entscheidungsfunktion zu,
   d. h. eine Funktion, die n Individuen aus X einen Wahrheitswert zuordnet.

Basisinterpretation

$\mathcal{I}$ ist eine Basisinterpretation für X gdw.

(i) X und $\mathcal{I}$ bilden eine Situation

(ii) $\mathcal{I}$ ordnet jedem $v \in IV$ ein $x \in X$ zu.

Abgeänderte Basisinterpretation

$\mathcal{I}$ sei eine Basisinterpretation für X, x aus X und v eine IV. Dann wird folgendermaßen eine abgeänderte Basisinterpretation definiert:

$$\mathcal{I}_v^x(\alpha) := \begin{cases} x & \text{falls } \alpha = v \\ \mathcal{I}(\alpha) & \text{sonst} \quad \text{für Konstanten oder Variablen } \alpha \neq v \end{cases}$$

Prädikatenlogische Interpretation

$\mathcal{I}$ ist eine prädikatenlogische Interpretation für X gdw.

(i) $\mathcal{I}$ ist eine Basisinterpretation für X

(ii) $\mathcal{I}(ft_1 \ldots t_n) = \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n))$ für jedes n-stellige $f \in FK^n$

(iii) $\mathcal{I}(Pt_1 \ldots t_n) = \mathcal{I}(P)(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n))$ für jedes n-stellige $P \in PK$

(iv) $\mathcal{I}$ ist eine aussagenlogische Interpretation

(v) $\mathcal{I}(\forall v A) = \min_x \mathcal{I}_v^x(A)$ für jeden Satz A und jedes $v \in IV$

(vi) $\mathcal{I}(\exists v A) = \max_x \mathcal{I}_v^x(A)$ für jeden Satz A und jedes $v \in IV$

1.2.3 Geltungsbegriffe

Tautologie (aussagenlogische Allgemeingültigkeit)

Ein Satz A heißt aussagenlogisch allgemeingültig oder eine Tautologie gdw.
$\mathcal{I}(A) = 1$ für jede aussagenlogische Interpretation $\mathcal{I}$.

Kontradiktion (Allgemeinungültigkeit)

Ein Satz A heißt aussagenlogisch allgemeinungültig oder eine Kontradiktion gdw.
$\mathcal{I}(A) = 0$ für jede aussagenlogische Interpretation $\mathcal{I}$.

Kontingenz

Ein Satz A heißt aussagenlogisch kontingent gdw. A aussagenlogisch weder Tautologie noch Kontradiktion ist.

Situative Geltung

A sei ein Satz und $\mathcal{I}$ eine prädikatenlogische Interpretation für S. Dann sagt man:
Bei $\mathcal{I}$ gilt A (geschrieben: $\mathcal{I} \models A$) oder bei S gilt A (geschrieben: $S \models A$) gdw. $\mathcal{I}(A) = 1$.

Folgerung (voraussetzungsabhängige Geltung)

A sei ein Satz und M ein Bereich von Sätzen. Aus M folgt A (geschrieben: $M \models A$ oder $M \Rightarrow A$) gdw. für jede prädikatenlogische Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:
Wenn $\mathcal{I}B = 1$ für alle $B \in M$, dann $\mathcal{I}A = 1$.

Allgemeingültigkeit

Ein Satz A heißt allgemeingültig (geschrieben: $\models A$) gdw.
$\mathcal{I}(A) = 1$ für jede PL1-Interpretation $\mathcal{I}$.

Logische Äquivalenz

Zwei Sätze A_1 und A_2 heißen logisch äquivalent (geschrieben: $A_1 \Leftrightarrow A_2$) gdw.
$\mathcal{I}(A_1) = \mathcal{I}(A_2)$ für jede Interpretation $\mathcal{I}$.

1.3 Aussagenlogische Gesetze (Tautologien)

1.3.1 Allgemeingültige Biimplikationen

Idempotenz	$A \wedge A \leftrightarrow A$	$A \vee A \leftrightarrow A$
Neutralelement	$A \wedge \top \leftrightarrow A$	$A \vee \bot \leftrightarrow A$
Kürzungsregel	$A \wedge \bot \leftrightarrow \bot$	$A \vee \top \leftrightarrow \top$
Widerspruch / TND[2]	$A \wedge \neg A \leftrightarrow \bot$	$A \vee \neg A \leftrightarrow \top$
Kommutativität	$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
Assoziativität	$A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
Distributivität	$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Absorption	$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	$A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

doppelte Negation	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
Kontraposition	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
Transportation	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$
Definition von $\dot\vee$	$A \dot\vee B \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
Definition von $\rightarrow$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$
Definition von $\leftrightarrow$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
$\leftrightarrow$-$\dot\vee$-Abhängigkeit	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg A \dot\vee B$
Negation von $\dot\vee$	$\neg(A \dot\vee B) \leftrightarrow \neg A \dot\vee B \leftrightarrow A \dot\vee \neg B$
Negation von $\leftrightarrow$	$\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$

1.3.2 Allgemeingültige Implikationen

Abschwächung der $\wedge$	$A \wedge B \rightarrow A$
Abschwächung zur $\vee$	$A \rightarrow A \vee B$
Abschwächung der $\leftrightarrow$	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
Transitivität	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
Ex Falso Quodlibet	$\bot \rightarrow A$
Exhaustion	$(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (A \wedge \neg B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
Modus Ponens	$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$
Modus Tollens	$\neg B \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$
Reductio Ad Absurdum	$(A \rightarrow \bot) \rightarrow \neg A$
Selbstbestätigung	$(A \wedge \neg B \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
Selbstwiderlegung	$(A \wedge B \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

1.4 Prädikatenlogische Gesetze

1.4.1 Allgemeingültige Biimplikationen

De Morgan (verallgemeinert)	$\models \neg\forall vA \leftrightarrow \exists v\neg A$	$\models \neg\exists vA \leftrightarrow \forall v\neg A$
Vertauschung	$\models \forall u\forall vA \leftrightarrow \forall v\forall uA$	$\models \exists u\exists vA \leftrightarrow \exists v\exists uA$
Aufsplittung	$\models \forall v(A \wedge B) \leftrightarrow \forall vA \wedge \forall vB$	$\models \exists v(A \vee B) \leftrightarrow \exists vA \vee \exists vB$

[2]Tertium Non Datur (Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten) (rechte Spalte)

1.4.2 Allgemeingültige Implikationen

$$\begin{aligned} \forall v P v &\to P a & P a &\to \exists v P v \\ \forall u \forall v P u v &\to \forall v P v v & \exists v P v v &\to \exists u \exists v P u v \\ \forall v (A \vee B) &\to \exists v A \vee \forall v B & \exists v (A \wedge B) &\to \exists v A \wedge \exists v B \\ \forall v A \vee \forall v B &\to \forall v (A \vee B) & \exists v A \wedge \forall v B &\to \exists v (A \wedge B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall v A &\to \exists v A \\ \exists u \forall v A &\to \forall v \exists u A \\ \forall v (A \vee B) \wedge \exists v \neg A &\to \exists v B \end{aligned}$$

1.5 Kalkül des natürlichen Schließens (nach Gamut)

IA $$\frac{}{A \mid A}$$

IP $$\frac{M_1 \mid A}{M_2 \mid A} \quad \text{falls } M_1 \subset M_2.$$

$\mathrm{I}_\neg$ $$\frac{M, A \mid B \wedge \neg B}{M \mid \neg A}$$

$\mathrm{E}_\neg$ $$\frac{M \mid \neg A}{M, A \mid B \wedge \neg B}$$

EFQ $$\frac{M \mid A \wedge \neg A}{M \mid B}$$

$\mathrm{E}_{\neg\neg}$ $$\frac{M \mid \neg\neg A}{M \mid A}$$

$\mathrm{I}_\wedge$ $$\frac{\begin{array}{c} M \mid A \\ M \mid B \end{array}}{M \mid A \wedge B}$$

$\mathrm{E}_\wedge$ $$\frac{M \mid A \wedge B}{M \mid A} \qquad \frac{M \mid A \wedge B}{M \mid B}$$

$\mathrm{I}_\vee$ $$\frac{M \mid A}{M \mid A \vee B} \qquad \frac{M \mid B}{M \mid A \vee B}$$

$\mathrm{E}_\vee$ $$\frac{\begin{array}{c} M \mid A \vee B \\ M \mid A \rightarrow C \\ M \mid B \rightarrow C \end{array}}{M \mid C}$$

$\mathrm{I}_\rightarrow$ $$\frac{M, A \mid B}{M \mid A \rightarrow B}$$

$\mathrm{E}_\rightarrow$ $$\frac{\begin{array}{c} M \mid A \\ M \mid A \rightarrow B \end{array}}{M \mid B}$$

$\mathrm{I}_\forall$ $$\frac{M \mid A_v^t}{M \mid \forall v A}$$ falls t nicht in M und $\forall v A$ vorkommt.

$\mathrm{E}_\forall$ $$\frac{M \mid \forall v A}{M \mid A_v^t}$$ t beliebig

$\mathrm{I}_\exists$ $$\frac{M \mid A_v^t}{M \mid \exists v A}$$ t beliebig

$\mathrm{E}_\exists$ $$\frac{\begin{array}{c} M \mid \exists v A \\ M \mid A_v^t \rightarrow B \end{array}}{M \mid B}$$ falls t nicht in M, $\exists v A$ und B vorkommt.

$\mathrm{I}_\square$:	Einführungsregel für $\square$,	$\mathrm{E}_\square$:	Eliminationsregel für $\square$,
IA:	Annahmeneinführungsregel,	IP:	Prämisseneinführungsregel,
EFQ:	Ex Falso Quodlibet		

Abgeleitete Kalkülregeln

KP $$\frac{M, A \mid B}{M, \neg B \mid \neg A} \qquad \frac{M, \neg A \mid \neg B}{M, B \mid A}$$

EX $$\frac{\begin{array}{c} M, A \mid B \\ M, \neg A \mid B \end{array}}{M \mid B}$$

SB $$\frac{M, \neg A \mid A}{M \mid A}$$

SW $$\frac{M, A \mid \neg A}{M \mid \neg A}$$

KP:	Kontrapositionsregel,	EX:	Exhaustionsregel,
SB:	Selbstbestätigungsregel,	SW:	Selbstwiderlegungsregel

1.6 Dialogspiele

1.5.1 Inhaltliches Dialogspiel

Rederechtsregeln:

1. Der Proponent beginnt mit dem Aufstellen einer Behauptung A.
2. Abwechselndes Rederecht.
3. Jede Aussage ist nur einmal angreifbar.

Argumentationsregeln:

Aussage	Gegenargument
A	$\begin{cases} — & \text{falls } A \text{ atomar und wahr} \\ \emptyset & \text{falls } A \text{ atomar und falsch} \end{cases}$
$\neg A$	A
$A \wedge B$	$\neg A$, $\neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$\forall v A$	$\neg A_v^t$ falls in t keine auf einen Quantor bezogene Variable vorkommt
$\exists v A$	$\forall v \neg A$

1.5.2 Formales Dialogspiel

Rederechtsregeln:

1. Der Proponent beginnt mit dem Aufstellen einer Behauptung A.
2. Abwechselndes Rederecht.
3. Der Opponent darf Aussagen des Proponenten nur einmal angreifen; der Proponent darf Aussagen des Opponenten so lange angreifen, bis er keine neuen Argumente mehr gegen sie vorbringen kann.
4. Der Opponent darf keine Behauptungen vom Proponenten angreifen, die er selbst behauptet hat (Konsistenzregel).

Argumentationsregeln:

Aussage	Gegenargument
A	$\begin{cases} — & \text{falls } A \text{ atomar und kommt beim Opponenten vor} \\ \emptyset & \text{falls } A \text{ atomar und kommt nicht beim Opponenten vor} \end{cases}$
$\neg A$	A
$A \wedge B$	$\neg A$, $\neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$\forall v A$	$\neg A_v^t$ falls in t keine auf einen Quantor bezogene Variable vorkommt
$\exists v A$	$\forall v \neg A$

Gewinnregel:

Derjenige Spieler gewinnt, dessen Aussagen nicht mehr angegriffen werden können.