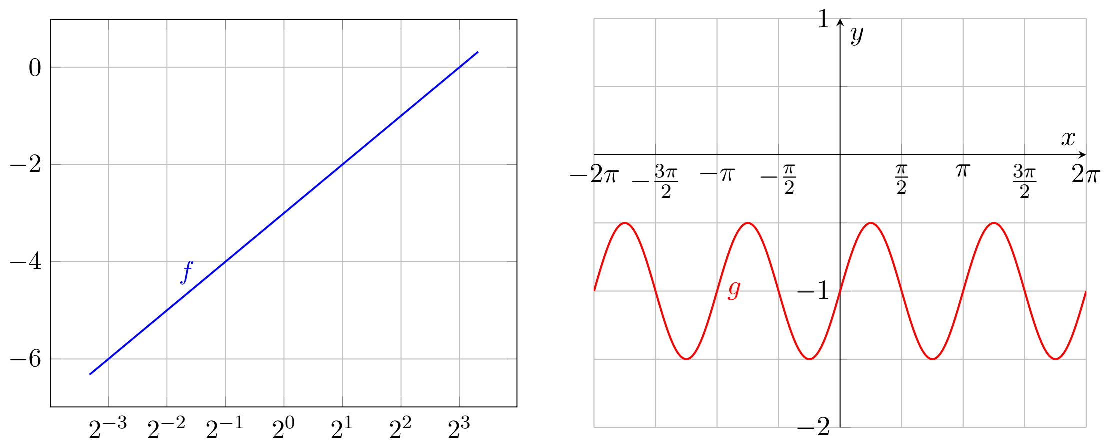
Tim Schulze
Fakultät für Mathematik
Sommersemester 2019

Erste Klausur zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen (240109)* vom 16.07.2019

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)
Geben Sie (ohne Begründung) die Funktionsvorschrift zu den abgebildeten Funktionsgraphen von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.



Lösung: Es ist

$$f(x) = -3 + \log_2(x), \quad g(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Aufgabe 2 (5+5+5 Punkte)

(a) Schreiben Sie die Menge $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x-3| < 6 \right\}$ als Intervall. Begründen Sie Ihre Behauptung.

(b) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f mit der Vorschrift

$$f(x) = \ln(10 \cdot \cos(x))$$

an.

(c) Bestimmen Sie die erste Ableitung f' der Funktion f aus Aufgabenteil (b).

Lösung:

(a) Es gilt

$$|x-3| < 6 \Leftrightarrow -6 < x-3 < 6 \Leftrightarrow -3 < x < 9$$

und daher $M = (-3, 9)$.

(b) Damit der Funktionsterm von f definiert ist, muss $\cos(x) > 0$ gelten. Wir wissen

$$\cos(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Daher ist der maximale Definitionsbereich D von f gegebene durch

$$\left\{x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(c) Wir rechnen mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{1}{10\cos(x)} \cdot 10(-\sin(x)) = -\tan(x).$$

Aufgabe 3 (10+5 Punkte)
Um das Wachstumsverhalten des echten Hopfens *(Humulus lupulus)* zu untersuchen, wird eine Messreihe durchgeführt. Zu Beginn der Beobachtung hatte der Hopfen eine Höhe von $0,5$ m. Bei einer weiteren Messung nach 7 Tagen misst er 1 m. Erfahrungsgemäß wird die untersuchte Hopfensorte niemals höher als 6 m. Benutzen Sie zur Modellierung das Modell des **logistischen Wachstums**.

(a) Berechnen Sie die Höhe des Hopfens nach 25 und nach 30 Tagen.

(b) Nach wie vielen Tagen hat der Hopfen eine Höhe von 4 m erreicht?

Lösung:

(a) Wir suchen zunächst nach einer Funktion $y : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Form

$$y(t) = \frac{y(t_0)S}{y(t_0) + (S - y(t_0))\exp(-Sk(t - t_0))},$$

wobei aus dem Aufgabentext abzulesen ist, dass

$$t_0 = 0, \quad y(t_0) = 0,5, \quad y(7) = 1, \quad S = 6.$$

Wir setzen dies in unseren Funktionsterm ein, um den fehlenden Parameter k zu berechnen:

$$1 = y(7) = \frac{3}{0,5 + 5,5 \cdot \exp(-42k)}.$$

Wir setzen noch zur Vereinfachung $e^{-k} = a$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{0,5 + 5,5a^{42}} \\ \iff \quad 3 &= 0,5 + 5,5a^{42} \\ \iff \quad \frac{5}{11} &= a^{42} \\ \iff \quad \left(\frac{5}{11}\right)^{\frac{1}{42}} &= a \end{aligned}$$

Also lautet unsere Funktionsvorschrift

$$y(t) = \frac{3}{0,5 + 5,5\left(\frac{5}{11}\right)^{\frac{t}{7}}} = \frac{6}{1 + 11\left(\frac{5}{11}\right)^{\frac{t}{7}}}.$$

Es gilt: $y(25) \approx 3,62, y(30) \approx 4,36$.
Der Hopfen hat nach 25 Tagen eine Höhe von ca. $3,62$ m erreicht. Nach 30 Tagen ist er ca. $4,36$ m hoch.

(b) Wir lösen $y(t) = 4$ nach t auf. Es gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= 4 \\ \iff 3 &= 2 + 22\left(\frac{5}{11}\right)^{\frac{t}{7}} \\ \iff \frac{1}{22} &= \left(\frac{5}{11}\right)^{\frac{t}{7}} \\ \iff \ln\left(\frac{1}{22}\right) &= \frac{t}{7}\ln\left(\frac{5}{11}\right) \\ \iff t &= 7\frac{\ln\left(\frac{1}{22}\right)}{\ln\left(\frac{5}{11}\right)} \approx 27,44 \end{aligned}$$

Die Pflanze hat nach ca. $27,44$ Tagen eine Höhe von 4 m erreicht.

Aufgabe 4 (5+5+5 Punkte)
Wir betrachten für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von t ist A invertierbar?

(b) Berechnen Sie für $t = 3$ die Inverse von A.

(c) Sei wieder $t = 3$. Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an.

Lösung:

(a) Das Vertauschen der dritten und der zweiten Zeile der Matrix führt zu einer oberen Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Diagonalelemente ist. Das Vertauschen der Zeilen wird mit dem Faktor (-1) berücksichtigt, daher

$$\det(A) = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Damit ist A für jede reelle Zahl t invertierbar.

(b) Wir rechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-3) \ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt genau dann $Ax = b$, wenn $x = A^{-1}b$. Demnach

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (3+12 Punkte)
Betrachtet wird die Funktion $f : [-3, 5] \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 2x - 8) \cdot e^{\frac{1}{4}x}$.

(a) Geben Sie alle $x \in [-3, 5]$ mit $f(x) = 0$ an.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion f mit den zugehörigen Funktionswerten.

Lösung:

(a) Es gilt

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 8 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = 1 \pm 3.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\{x \in [-3, 5] \mid f(x) = 0\} = \{-2, 4\}.$$

(b) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte in $(-3,5)$. Diese sind gerade Lösungen von $f'(x)=0$. Es gilt

$$f'(x)=(2x-2)e^{\frac{1}{4}x}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}(x^2-2x-8)=e^{\frac{1}{4}x}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-4\right).$$

Daher

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-4\right)=0 \Longleftrightarrow x^2+6x-16=0.$$

Wir folgern $x=-3\pm\sqrt{9+16}=3\pm5$. Kritische Punkte sind also $x=-8$ und $x=2$. Da $-8\notin(-3,5)$, bekommen wir als einzigen kritischen Punkt im Definitionsbereich $x=2$.

Wir überprüfen, ob in $x=2$ ein Extremum vorliegt. Hierzu benutzen wir das hinreichende Kriterium $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)e^{\frac{1}{4}x}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-4\right)=\frac{1}{16}e^{\frac{1}{4}x}\left(x^2+14x+8\right).$$

Damit $f''(2)=\frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}}>0$. An der Stelle $x=2$ liegt also ein lokales Minimum.

Wir berechnen den Funktionswert und überprüfen auch die Randwerte:

$$f(-3)=7e^{-\frac{3}{4}}\approx 3,31,\quad f(2)=-8e^{\frac{1}{2}}\approx -13,19,\quad f(5)=7e^{\frac{5}{4}}\approx 24,43.$$

Schlussfolgerung: Die Funktion f besitzt in

- $x=-3$ ein lokales Maximum,
- $x=2$ ihr globales Minimum,
- $x=5$ ihr globales Maxium.

Aufgabe 6 (4+6+5 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\text{(a)} \int_0^5 (x-2)^4\,\mathrm{d}x,\qquad \text{(b)} \int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a)

$$\int_0^5 (x-2)^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(x-2)^5|_0^5=\frac{1}{5}\left(3^5-(-2)^5\right)=55.$$

(b)

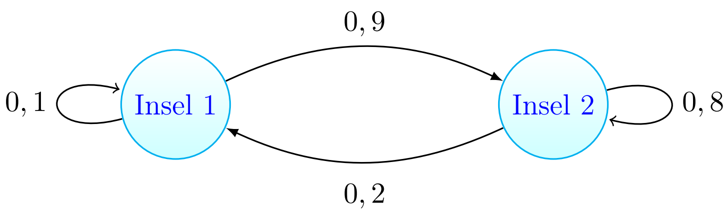
$$\begin{aligned}\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^L 2x \cdot e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^{L^2} e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2} (-e^{-u})\big|_0^{L^2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2(x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \iff 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \quad = 1$$

$$\iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 7 (4+4+7 Punkte)
Wir betrachten zwei Populationen von Seevögeln, deren Siedlungsgebiete sich auf zwei Inseln erstrecken. Das Migrationsverhalten werde in dem folgenden Übergangsdiagramm festgehalten:



(a) Geben Sie diejenige Übergangsmatrix P an, die das Migrationsverhalten der Seevögel beschreibt.

(b) Zeigen Sie, dass ein stabiler Zustand für das zugehörige System existiert.

(c) Teilen Sie 22.000 Seevögel derart auf die beiden Inseln auf, dass sich das System in einem stabilen Zustand befindet und sich auf jeder Insel eine ganzzahlige Anzahl von Vögeln befindet.

Lösung:

(a)

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,9 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir zeigen, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von P ist. Hierzu rechnen wir nach, dass $\det(P - E_2) = 0$:

$$\det(P - E_2) = \det \begin{pmatrix} -0,9 & 0,2 \\ 0,9 & -0,2 \end{pmatrix} = 0,9 \cdot 0,2 - 0,9 \cdot 0,2 = 0.$$

Also besitzt P einen stabilen Zustand.

(c) Wir berechnen die Eigenvektoren zu $\lambda = 1$. Hierzu bestimmen wir die Lösungsmenge zu

$$(P - E_2)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -0,9 & 0,2 \\ 0,9 & -0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff x_1 = \frac{2}{9} x_2.$$

Setzen wir $x_2 = 9$, so erhalten wir den Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$. Die Lösungsmenge ist also gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei wir bemerken, dass $t = 0$ keinen Eigenvektor liefert.
Es ist

$$v \cdot 2000 = \begin{pmatrix} 4000 \\ 18000 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}.$$

Wir verteilen deshalb 4000 Vögel auf die erste Insel und die restlichen 18000 auf die zweite Insel.