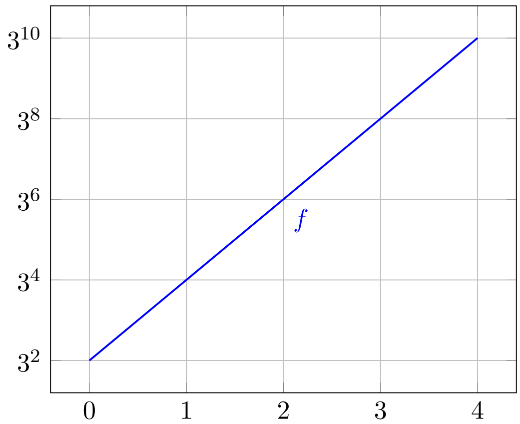
Tim Schulze
Fakultät für Mathematik
Sommersemester 2019

Universität Bielefeld

Zweite Klausur zu *Mathematik für Biologen und Biotechnologen (240109)* vom 26.09.2019

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

(a) Geben Sie (ohne Begründung) die Funktionsvorschrift zu dem abgebildeten Funktionsgraphen von $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ an.

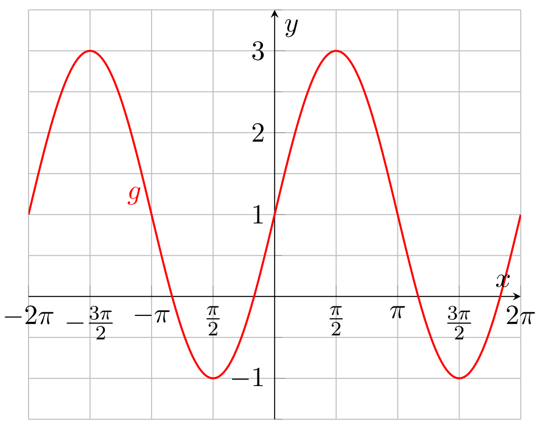


(b) Im Klausurbogen finden Sie auf Seite 5 ein leeres Koordinatensystem. Fertigen Sie in diesem Koordinatensystem eine Skizze der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2\sin(x) + 1$ an.

Lösung:

(a) Es ist $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 3^{2+2x}$.

(b) Nachfolgend kommt ein Plot des geforderten Funktionsgraphen.



Aufgabe 2 (5+5+5 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, sodass die in der Gleichung auftretenden Ausdrücke definiert sind:

$$\log_5(3x-5) = 2. \tag{1}$$

(c) Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, die Gleichung (1) lösen.

Lösung:

(a) Wir rechnen

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Der Logarithmus ist definiert, wenn $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$, d.h. $x \in (\frac{5}{3}, \infty)$.

(c) Es gilt

$$\log_5(3x-5) = 2 \Leftrightarrow 3x - 5 = 5^2 \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10.$$

Aufgabe 3 (10+5 Punkte)

Ein Kaltgetränk mit einer Temperatur von 7° C erwärmt sich bei einer Umgebungstemperatur von 23° C innerhalb von 10 Minuten auf 14° C.

(a) Welche Temperatur hat das Getränk 5 Minuten nach Beobachtungsbeginn? Welche Temperatur hat es nach 30 Minuten?

(b) Nach welcher Zeit hat die Temperatur des Getränks 20° C erreicht?

Lösung: Wir benutzen das Modell des beschränkten Wachstums zur Modellierung. Die Temperatur zum Zeitpunkt t ist hier gegeben durch

$$y(t) = S - (S - y(t_0))\, e^{-k(t-t_0)}.$$

Aus dem Aufgabentext lesen wir ab

$$t_0 = 0, \quad y(t_0) = y(0) = 7, \quad y(10) = 14, \quad S = 23.$$

Wir berechnen zunächst den Parameter k:

$$14 = y(10) = 23 - 16e^{-10k} \Leftrightarrow \frac{9}{16} = e^{-10k} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{9}{16}\right) = -10k \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{16}{9}\right)}{10}\, (\approx 0,0575)\,.$$

Daher

$$y(t) = 23 - 16e^{-t\frac{\ln\left(\frac{16}{9}\right)}{10}} = 23 - 16\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

(a) Wir erhalten

$$y(5) = 23 - 16\sqrt{\frac{9}{16}} \approx 11$$
$$y(30) = 23 - 16\left(\frac{16}{9}\right)^3 \approx 20,15.$$

Nach 5 Minuten bzw. nach 30 Minuten hat das Getränk eine Temperatur von etwa 11° C bzw. 20, 15° C.

(b) Wir lösen $y(t) = 20$ nach t auf.

$$\begin{aligned} & 20 = 23 - 16\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{t}{10}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{3}{16} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{t}{10}} \\ \Leftrightarrow \quad & \ln\left(\frac{3}{16}\right) = \frac{t}{10}\ln\left(\frac{9}{16}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & t = 10\frac{\ln\left(\frac{3}{16}\right)}{\ln\left(\frac{9}{16}\right)} \approx 29,09. \end{aligned}$$

Das Getränk hat nach ca. 29, 09 Minuten eine Temperatur von 20° C erreicht.

Aufgabe 4 (15 Punkte)
Für ein Experiment müssen Sie eine Flüssigkeit aus 3 verschiedenen Zutaten mischen.

- Zutat A enthält pro Liter 1 mg von Stoff X und 2 mg von Stoff Y.
- Zutat B enthält pro Liter 2 mg von Stoff X und 2 mg von Stoff Y.
- Zutat C enthält pro Liter 2 mg von Stoff X und 1 mg von Stoff Y.

Sie sollen 4 Liter der Flüssigkeit herstellen. Diese 4 Liter sollen 6 mg von Stoff X und 7 mg von Stoff Y enthalten. Wieviel Liter Zutat A, Zutat B bzw. Zutat C werden hierzu gebraucht?

Lösung:
Aus der Aufgabenstellung erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \end{aligned}$$

wobei x_1 die Menge der Zutat A in Litern angibt, x_2 die Menge der Zutat B in Litern und x_3 die Menge der Zutat C in Litern.

Das LGS führt zu der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Elementare Umformungen führen zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Daher $x_3 = 1$. Dies in Kombination mit der zweiten Zeile der Matrix führt zu der Gleichung $x_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 1$. Aus der ersten Zeile folgern wir nun $x_1 + 2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2$. Es werden also 2 Liter von Zutat A, sowie jeweils 1 Liter der Zutaten B und C benötigt.

Aufgabe 5 (4+6+5 Punkte)
Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A. (Zum Weiterrechnen: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$.)

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor.

(c) Finden Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$w'(t) = Aw(t)$$

mit vorgegebenem Anfangswert $w(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Wir lösen $\det(A - \lambda E_2) = 0$ nach λ auf. es gilt

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Mit der pq-Formel erhalten wir

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Also $\lambda \in \{-2, 3\}$.

(b) Wir bestimmen zunächst einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^2$ zum Eigenwert $\lambda = -2$. Hierzu bestimme eine Lösung von $(A - (-2)E_2)v = 0$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir setzen $v_1 = 1$, dann folgt $2 + v_2 = 0 \Leftrightarrow v_2 = -2$. Daher $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Einen Eigenvektor $u \in \mathbb{R}^2$ zum Eigenwert 3 findet man durch lösen von $\det(A - 3E_2) = 0$. Hier ist z.B. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Lösung.

(c) Aus der Vorlesung wissen wir:

$$w(t) = C_1 v e^{-2t} + C_2 u e^{3t},$$

wobei C_1, C_2 Konstanten sind. Wir bestimmen die Konstanten derart, dass der Anfangswert $w(0)$ erfüllt ist. Wir erhalten das LGS

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= -2C_1 + 3C_2. \end{aligned}$$

Daher $C_1 = -C_2$. Die zweite Glg. liefert $1 = -2C_1 - 3C_1 = -5C_1$, d.h. $C_1 = -\frac{1}{5}$ und damit $C_2 = \frac{1}{5}$. Insgesamt

$$w(t) = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Aufgabe 6 (9+6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -6x^3 + 3x^2 + 9x$$

im Intervall $I = [-1, 1]$ mit der x-Achse einschließt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $p : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit

$$p(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t, & \text{für } t \in [0, 1), \\ \frac{1}{3}(3 - t), & \text{für } t \in [1, 3], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Dichtefunktion ist.

Lösung:

(a) Der gesuchte Flächeninhalt A ist gegeben durch das Integral

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Wir bestimmen zunächst eine Stammfunktion F von f: $F(x) = \frac{-6}{4}x^4 + x^3 + \frac{9}{2}x^2 = -\frac{3}{2}x^4 + x^3 + \frac{9}{2}x^2$.

Jetzt bestimmen wir die Nullstellen des Graphen von f. Wir sehen $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $-6x^2 + 3x + 9 = 0$. Die quadratische Gleichung ist äquivalent zu

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Mit der pq-Formel erhalten wir

$$x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{24}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}.$$

Daher $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{-1, 0, \frac{3}{2}\}$.

Folglich

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{1} |f(x)| \, \mathrm{d}x &= \left| \int_{-1}^{0} f(x) \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| F(x)|_{-1}^{0} \right| + \left| F(x)_0^1 \right| \\ &= |0 - 2| + |4 - 0| \\ &= 6. \end{aligned}$$

(b) Wir müssen zeigen, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) \, \mathrm{d}t = 1.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \, \mathrm{d}t &= \int_{0}^{1} \frac{2}{3}t \, \mathrm{d}t + \int_{1}^{3} \frac{1}{3}(3 - t) \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{3}t^2 \right]_0^1 + \left[t - \frac{1}{6}t^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{3} + 3 - \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (9 + 6 Punkte)

(a) Berechnen Sie jeweils die Ableitung:

$$f(x) = \sin(x)e^{3x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad h(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

(b) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{e^{-x}}.$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(x)e^{3x} + 3e^{3x}\sin(x) = e^{3x}(\cos(x) + 3\sin(x)).\\
g'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\\
h'(x) &= \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

(b) Wir sehen, dass $\lim_{x\to\infty} 2x = \lim_{x\to\infty}(1+x^2) = \infty$. Daher folgt mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = 0.$$

Für den zweiten Grenzwert bemerken wir, dass $\lim_{x\to-\infty} \ln(-x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$. Wiederum mit der Regel von l'Hospital sehen wird

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^{-x}} = 0.$$