Prof. Dr. Moritz Kaßmann
Fakultät für Mathematik
Wintersemester 2018/19

Universität Bielefeld

Klausuraufgaben

Erste Klausur zur Vorlesung *Anwendungen der Mathematik*

7. Februar 2019

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (8 + 8 Punkte)
Eine Regentonne wird mit 5 °C kaltem Wasser befüllt und in eine Umgebung gestellt, die konstant 35 °C warm ist. Nach einer halben Stunde hat sich die Temperatur des Wassers auf 11 °C erhöht.

(a) Stellen Sie im Rahmen des Modells des beschränkten Wachstums eine Funktion auf, welche die Temperatur des Wassers nach t Stunden angibt.

(b) Nach welcher Zeit wird das Wasser eine Temperatur von 20 °C erreicht haben?

Lösung:

(a) Ansatz:

$$f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(t) = S - (S - f(t_0))e^{-kt}. \tag{1}$$

Aus dem Aufgabentext erhalten wir die Informationen

$$t_0 = 0, \quad f(t_0) = 5, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 11, \quad S = 35.$$

Setzen wir diese Informationen in (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 11 = f\left(\frac{1}{2}\right) &= 35 - 30e^{-\frac{1}{2}k} \\ \iff \frac{24}{30} &= e^{-\frac{1}{2}k} \\ \iff e^{-k} &= \left(\frac{24}{30}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Es folgt $e^{-kt} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2t}$ und daher

$$f(t) = 35 - 30\left(\frac{4}{5}\right)^{2t},$$

wobei wir betonen, dass t die Einheit Stunden trägt.

Bemerkungen: Man kann auch aus (2) $k = (-2)\ln\left(\frac{24}{30}\right) \approx 0.4463$. *Wer hier mit dem gerundeten Wert weiterrechnet, bekommt ebenfalls die volle Punktzahl.*

(b) Wir lösen $f(t) = 20$ nach t auf:

$$\begin{aligned} 20 &= 35 - 30\left(\frac{4}{5}\right)^{2t} \\ \Longleftrightarrow \frac{1}{2} &= \left(\frac{4}{5}\right)^{2t} \\ \Longleftrightarrow t &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \approx 1{,}55. \end{aligned}$$

Antwort: Das Wasser hat nach ca. 1,55 Stunden eine Temperatur von 20 °C erreicht.

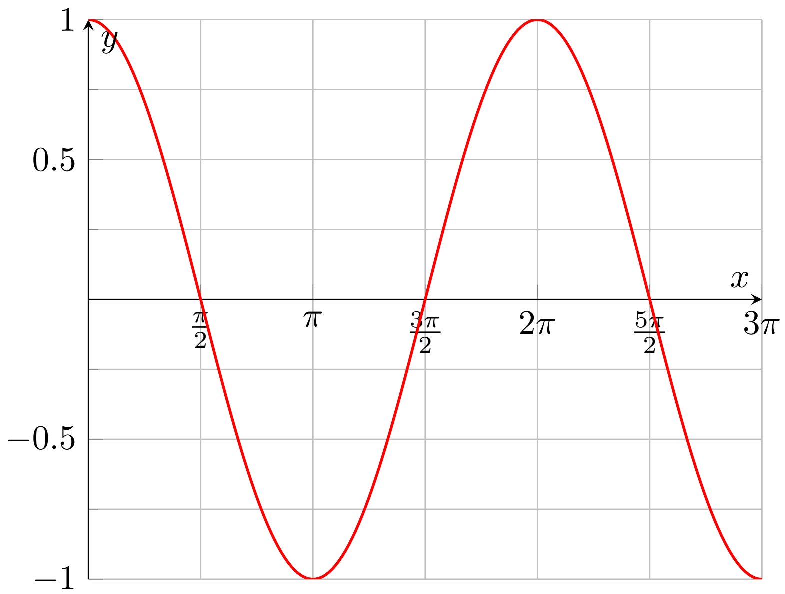
Aufgabe 2 (8 + 8 Punkte)
Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt der Fläche, der zwischen dem Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der x-Achse im angegebenen Intervall I eingeschlossen wird:

(a) $f(x) = \cos(x)$, $I = [0, 3\pi]$,

(b) $f(x) = e^{-x}$, $I = [0, a]$, wobei $a > 0$ ein beliebiger Parameter ist.

Stellen Sie die eingeschlossene Fläche jeweils grafisch dar.
Lösung:

(a) Der Graph im entsprechenden Intervall sieht wie folgt aus.



Daher

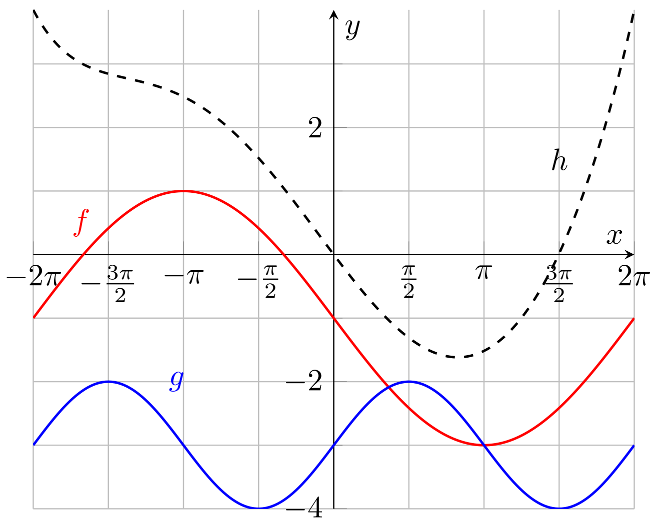
$$\int_0^{3\pi} |\cos(x)|\,\mathrm{d}x = 3\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = 3\sin(x)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} = 3\cdot\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 3(1-(-1)) = 6.$$

(b) Der Graph im entsprechenden Intervall sieht wie folgt aus.

Daher

$$\int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^a = -e^{-a} - (-e^0) = 1 - e^{-a}.$$

Aufgabe 3 (9 + 8 Punkte)
Gegeben sind drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

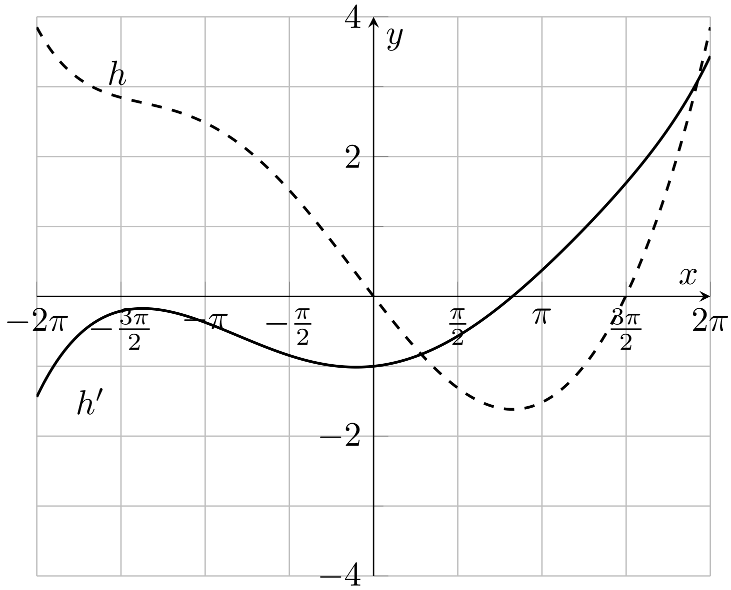


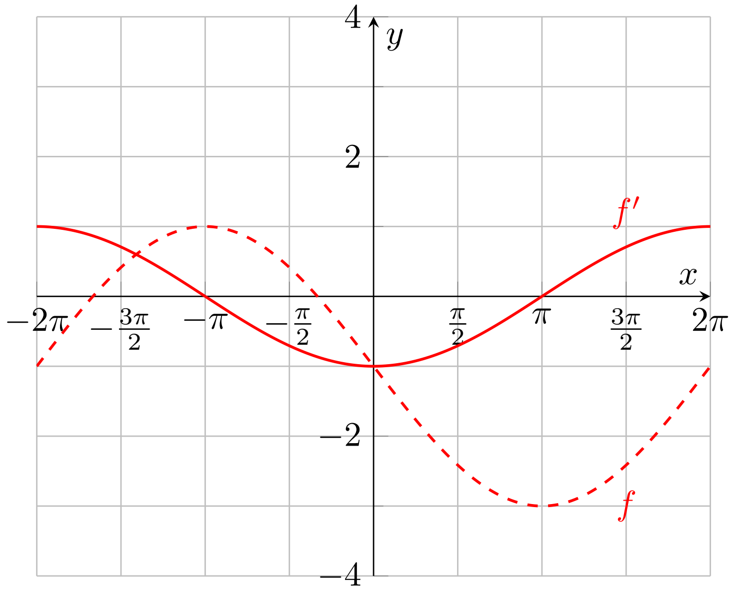
(a) Im Klausurbogen finden Sie drei leere Grafiken bzw. Koordinatensysteme. Tragen Sie dort die Graphen der Ableitungen von f, g und h ein.

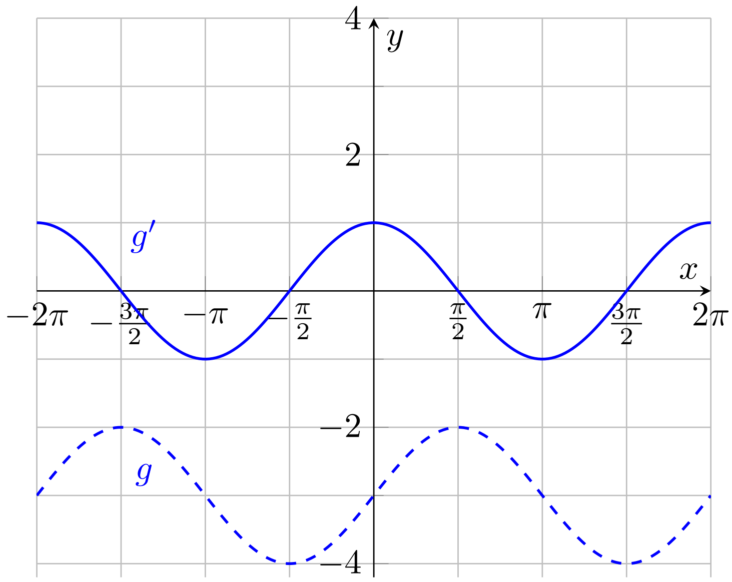
(b) Geben Sie die Zuordnungsvorschriften für die periodischen Funktionen f und g an.

Lösung:

(a) Die folgenden Grafiken zeigen die jeweilige Funktion und ihre Ableitung.







(b) Es gilt

$$f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -1 - 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1 - 2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$g : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin(x) - 3 = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3.$$

Aufgabe 4 (4 + 11 + 4 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x .$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen inkl. der Funktionswerte von f.

(c) Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente an f an der Stelle $x_0 = 2$.
Diese Gerade schließt zusammen mit der x- und y-Achse ein rechtwinkliges Dreieck ein.
Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

Lösung:

(a) Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$. Es gilt

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Folglich sind die Nullstellen der Funktion f bei $x = -\sqrt{3}$ und $x = \sqrt{3}$.

(b) Die notwendige Bedingung für Extremstellen lautet: $f'(x) = 0$. Dies liefert

$$\begin{aligned} 0 = f'(x) &= 2x \cdot e^x + (x^2-3)e^x \\ &= e^x(x^2+2x-3). \end{aligned}$$

Da $e^x > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Diese Gleichung können wir mit der *pq-Formel* lösen. Wir erhalten als Lösungen

$$x = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2.$$

Folglich sind $x = -3$ und $x = 1$ Kandidaten für ein lokales Extremum von f.

Eine hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen lautet: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$. Wir berechnen daher $f''(-3)$ und $f''(1)$. Zunächst gilt

$$f''(x) = e^x(x^2+4x-1).$$

Also $f''(-3) = -4 \cdot e^{-3} < 0$ und $f''(1) = 4 \cdot e > 0$. Wir folgern, dass f in $x = -3$ ein lokales Maximum und in $x = 1$ ein lokales Minimum besitzt. Anschließend berechnen wir die Werte von f an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ und überprüfen das Randverhalten:

$$\begin{aligned} &f(-3) = 6e^{-3} \approx 0{,}2987, \quad f(1) = -2e \approx -5{,}43656, \\ &\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt: Die Funktion f hat ein lokales Maximum an der Stelle $x = -3$. Das globale Minimum liegt an der Stelle $x = 1$ und es existiert kein globales Maximum.

(c) Die Tangente von f an der Stelle $x_0 = 2$ ist eine lineare Funktion der Form $t(x) = mx + b$ durch den Punkt $(2, f(2))$ und mit Steigung $m = f'(2)$. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} f(2) &= (4-3)e^2 = e^2, \\ f'(2) &= (4+4-3)e^2 = 5e^2. \end{aligned}$$

Für den y-Achsenabschnitt b gilt

$$\begin{aligned} t(2) &= e^2 \\ \iff 5e^2 \cdot 2 + b &= e^2 \\ \iff b &= -9e^2 \end{aligned}$$

und wir erhlaten als Tangentengleichung

$$t(x) = 5e^2 \cdot x - 9e^2.$$

Um den Flächeninhalt A des zwischen der Tangente sowie der x- und y-Achse eingeschlossenen Dreiecks zu berechnen, benötigen wir noch die Nullstelle der Tangente t. Es gilt

$$t(x) = 0 \Longleftrightarrow 5e^2 \cdot x - 9e^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{9}{5}.$$

Folglich ist der Flächeninhalt A gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} \cdot 9e^2 \cdot \frac{9}{5} = 8,1e^2 \approx 59,851.$$

Aufgabe 5 (4 + 4 + 4 + 4 Punkte)
Im Mittel werden der Polizei Bielefeld pro Jahr 6 Fahrraddiebstähle an der Universität angezeigt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr genau 5 Fahrraddiebstähle an der Universität angezeigt werden?
Hinweis für Aufgabenteile (c) und (d): Die Antwort in Aufgabenteil (a) ist 16.06%.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr 3 oder mehr Fahrraddiebstähle an der Universität angezeigt werden?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den Jahren 2019, 2020, 2021, 2022 jedes Jahr genau 5 Fahrraddiebstähle an der Universität angezeigt werden?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in genau 2 Jahren der Jahre 2019, 2020, 2021, 2022 genau 5 Fahrraddiebstähle pro Jahr an der Universität angezeigt werden?

Lösung:

(a) Sei X die Zufallsvariable, die angibt wie viele Fahrraddiebstähle an der Uni Bielefeld pro Jahr bei der Polizei angezeigt werden. Dann ist X Poisson-verteilt mit $\lambda = 6$ und es gilt

$$\mathbb{P}(X = 5) = e^{-6} \cdot \frac{6^5}{5!} \approx 0,1606.$$

Die Wahrscheinlichkeit für 5 angezeigte Fahrraddiebstähle in einem Jahr liegt bei ca. $16,06\%$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 0) \\
&= 1 - e^{-6} \cdot \frac{6^2}{2!} - e^{-6} \cdot \frac{6^1}{1!} - e^{-6} \cdot \frac{6^0}{0!} \\
&= 1 - 25e^{-6} \approx 0,934
\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca $93,4\%$ gibt es 3 oder mehr Anzeigen von Fahrraddiebstählen.

(c) Sei Y die Zufallsvariable, die angibt in wie vielen der Jahre zwischen 2019 und 2022 genau 5 Fahrraddiebstähle angezeigt werden. Dann ist Y binomialverteilt mit $n = 4$ (wir betrachten eine Zeitspanne von 4 Jahren) und $p = 0,1606$ (Erfolgswahrscheinlichkeit für genau 5 Anzeigen bekannt aus Aufgabenteil (a)). Dann gilt

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0,1606^4 \cdot (1 - 0,1606)^0 \approx 0,000665.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $0,0665\%$ gibt es in allen 4 Jahren genau 5 Anzeigen bei der Polizei.

(d) Es gilt

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,1606^2 \cdot (1 - 0,1606)^2 \approx 0,109034.$$

Zu ca. $10,09\%$ gibt es in 2 der 4 Jahre von 2019 bis 2022 genau 5 Anzeigen von Fahrraddiebstählen.

Aufgabe 6 (6 + 4 + 4 + 2 Punkte)

(a) Erklären Sie präzise, warum die Gleichung $0,\overline{9} = 1$ gilt.

(b) Sie zahlen 1000 EUR auf ein Konto ein. Die Bank verzinst das Guthaben jedes Jahr mit 3%. Der Zinsertrag wird ihrem Konto gutgeschrieben.

(i) Nach wie vielen Jahren erreicht Ihr Kontostand 2500 EUR?

(ii) Bei welchem Zinssatz würde sich Ihr Kapital nach 10 Jahren verdoppelt haben?

(iii) Wir gehen wieder von einem Zinssatz von 3% aus. Wie groß ist der Kontostand nach 20 Jahren, wenn Sie nach einem Jahr und danach jedes Jahr einmal 10 EUR abheben?

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} 0,\overline{9} &= 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\ &= 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k - 9 \\ &= 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 9 \\ &= 9 \cdot \frac{10}{9} - 9 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) Das Guthaben $G(t)$ nach t Jahren wird beschrieben durch die Funktion

$$G(t) = 1000 \cdot 1,03^t.$$

Zu (i): Gesucht ist $t \geq 0$ derart, dass $G(t) = 2500$. Es gilt

$$G(t) = 2500 \Longleftrightarrow 1000 \cdot 1,03^t = 2500 \Longleftrightarrow t = \frac{\ln(2,5)}{\ln(1,03)} \approx 30,9989.$$

Nach ca. 31 Jahren hat der Kontostand eine Höhe von 2500 EUR erreicht.
Zu (ii): Gesucht ist der entsprechende Zinssatz, sodass $G(10) = 2000$. Wir bestimmen

$$2000 = 1000 \cdot x^{10} \Longleftrightarrow 2 = x^{10} \Longleftrightarrow x = \sqrt[10]{2} \approx 1,072.$$

Bei einem Zinssatz von ca. $7,2\%$ würde sich das eingezahlte Guthaben nach 10 Jahren verdoppeln.
Zu (iii): Wird immer nach einem Jahr ein Betrag in Höhe von 10 EUR abgehoben, so ist das Guthaben $G(t)$ nach t Jahren gegeben durch

$$\begin{aligned} G(t) &= 1000 \cdot 1,03^t - 10 \cdot \sum_{k=0}^{t-1} 1,03^k \\ &= 1000 \cdot 1,03^t - 10 \cdot \frac{1 - 1,03^t}{1 - 1,03} \\ &= 1000 \cdot 1,03^t + \frac{1000}{3} \cdot \left(1 - 1,03^t\right) \\ &= \frac{2000}{3} \cdot 1,03^t + \frac{1000}{3}. \end{aligned}$$

Es ist $G(20) \approx 1537,41$, d.h. der Kontostand läge nach 20 Jahren bei ca 1537,41 EUR.