Prof. Dr. Moritz Kaßmann
Fakultät für Mathematik
Wintersemester 2018/19

Universität Bielefeld

Übungsaufgaben zu *Anwendungen der Mathematik*
Blatt VI vom 15.11.2018

Abgabe bis Freitag, 23.11.18, 8:30 Uhr im Postfach Ihrer Tutorin/Ihres Tutors (V3-128)

Aufgabe VI.1 (4 Punkte)
Mit Ebbe und Flut senkt und hebt sich der Grundwasserspiegel im küstennahen Bereich periodisch in der Zeit. Die Erdoberfläche werde auf Null normiert, d.h. die Höhe des Grundwassers ist also nie positiv. Der Unterschied zwischen Höchst– und Tiefststand sei 38 cm. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Tiefststand von -3 m gerade erreicht. Eine Ebbe folgt auf die nächste nach etwa 12 Stunden und 25 Minuten. Geben Sie eine Funktion an, deren Graph den zeitlichen Verlauf des Grundwasserspiegels beschreibt.

Aufgabe VI.2 (6+2 Punkte)

a) Erstellen Sie zu den unten aufgeführten Folgen jeweils eine Wertetabelle, in der Sie die ersten fünf Folgenglieder auflisten. Untersuchen Sie zudem die Folgen auf Konvergenz und begründen Sie Ihre Behauptung.

   (i) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

   (ii) $b_n = \frac{n + (-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

b) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die folgende Eigenschaften besitzt:
   - $|a_n| \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
   - $a_{2n} > a_{2m+1}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und
   - die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Aufgabe VI.3 (1+2+2 Punkte)

a) Sei $a_n = \frac{1}{2}n - 10,\ n \in \mathbb{N}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq 0$?

b) Untersuchen Sie die Folge
$$a_n = \frac{7n+2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$
auf Konvergenz und begründen Sie Ihre Behauptung.

c) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die folgende Eigenschaften besitzt:
   - $-2 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
   - $a_n \neq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
   - $a_n > \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
   - die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kovergiert.

Aufgabe VI.4 (3 Punkte)
Eine Folge (a_n) sei durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}|2 - a_n|$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert. Untersuchen Sie, ob diese Folge konvergiert.

Erreichbare Punktzahl: 20